Chapitre 29

Sous-espaces affines

Sommaire

I SOUS-ESPACES AFFINES

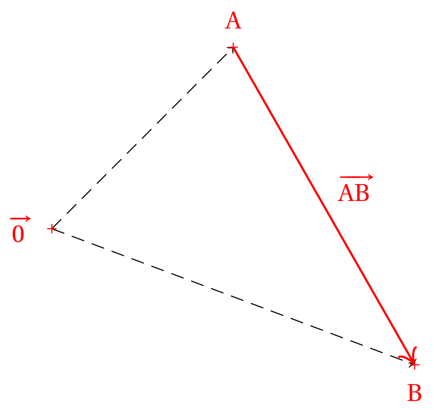
1) Définition

Soit $\overrightarrow{u} \in \mathrm{E}$, la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est l'application [1] $t_{\overrightarrow{u}} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ définie par $t_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. L'ensemble de ces applications est noté $\mathscr{T}_\mathrm{E}$ et il est facile de vérifier que $(\mathscr{T}_\mathrm{E}, \circ)$ est un groupe abélien, c'est un sous-groupe du groupe des permutations de E.

Si $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont deux vecteurs de E, alors il existe un unique vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathrm{E}$ tel que $t_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}$. Cette propriété très simple, suggère un autre point de vue pour les éléments de E : la notion de points.

La propriété précédente peut alors s'énoncer sous la forme suivante : si A et B sont deux points de E, alors il existe un unique vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $\mathrm{B} = t_{\overrightarrow{u}}(\mathrm{A})$. Ce vecteur $\overrightarrow{u}$ est noté : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, on remarquera que :

- $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \mathrm{B} - \mathrm{A}$, et $\mathrm{A} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \mathrm{B}$,
- $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \iff \mathrm{A} = \mathrm{B}$,
- $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}}$,
- $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}$.



1. non linéaire si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$.

Définition 29.1

Un sous - espace affine de E *est l'image d'un s.e.v. de* E *par une translation. Soit* $\mathscr{V}$ *une partie de* E, $\mathscr{V}$ *est un s.e.a. de* E *si et seulement si il existe un s.e.v* V *et un vecteur* $\vec{u}$ *tel que* $\mathscr{V} = t_{\vec{u}} < \mathrm{V} >$, *si c'est le cas,* V *est appelé direction du s.e.a.* $\mathscr{V}$ *(ce que l'on écrira :* $(\mathscr{V},\mathrm{V})$*), et on pose* $\dim(\mathscr{V}) = \dim(\mathrm{V})$. *On remarquera qu'un s.e.v. est un s.e.a. de direction lui-même.*

2) Propriétés

- Si $\mathscr{V}$ est un s.e.a. de direction V, alors V est unique (mais pas le vecteur de la translation), de plus $\mathscr{V}$ est un s.e.v. si et seulement si $\mathscr{V}$ contient le vecteur nul.
- Si $(\mathscr{V},\mathrm{V})$ est un s.e.a. alors $\forall\ \mathrm{A} \in \mathscr{V}$, $\mathscr{V} = \{\mathrm{A} + \vec{u}\ /\ \vec{u} \in \mathrm{V}\}$, et $\mathrm{V} = \{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ /\ \mathrm{B} \in \mathscr{V}\}$, on remarquera que $\forall\ \mathrm{B} \in \mathrm{E}, \mathrm{B} \in \mathscr{V} \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}} \in \mathrm{V}$.
- Si $(\mathscr{V},\mathrm{V})$ et $(\mathscr{V}',\mathrm{V}')$ sont deux s.e.a. de E, et si $\mathscr{V} \cap \mathscr{V}'$ n'est pas vide, alors $\mathscr{V} \cap \mathscr{V}'$ est un s.e.a de direction $\mathrm{V} \cap \mathrm{V}'$.
- Soient $(\mathscr{V},\mathrm{V})$ et $(\mathscr{V}',\mathrm{V}')$ sont deux s.e.a. de E, soient $\mathrm{A} \in \mathscr{V}$ et $\mathrm{A}' \in \mathscr{V}'$, alors $\mathscr{V} \cap \mathscr{V}' \neq \varnothing \iff \overrightarrow{\mathrm{AA}'} \in \mathrm{V} + \mathrm{V}'$. On remarquera que la condition est nécessairement remplie lorsque $\mathrm{E} = \mathrm{V} + \mathrm{V}'$.

★**Exercice 29.1** *Étudier les s.e.a. de* E *lorsque* $\dim(\mathrm{E}) = 3$.

3) Repères cartésiens

Définition 29.2

Un repère cartésien $\mathscr{R} = (\mathrm{O}, \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ *de* E, *est la donnée d'un point* O *de* E *(appelé origine du repère), et d'une base* $\mathscr{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ *de* E. *Pour tout point* M *de* E, *on appelle coordonnées de* M *dans le repère* $\mathscr{R}$, *les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ *dans la base* $\mathscr{B}$. *On remarquera qu'il s'agit des coordonnées de* $\mathrm{M} - \mathrm{O}$ *dans la base* $\mathscr{B}$.

Propriété : si A et B ont pour coordonnées respectives $(u_1, \dots, u_n)$ et $(v_1, \dots, v_n)$ dans le repère $\mathscr{R}$, alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ dans la base $\mathscr{B}$ sont $(v_1 - u_1, \dots, v_n - u_n)$. Il suffit pour cela d'écrire $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$.

II HYPERPLANS AFFINES

1) Équation

Équation(s) cartésienne(s) d'un hyperplan affine : Soit $\mathscr{R} = (\mathrm{O}, \mathscr{B})$ un repère de E, avec $\dim(\mathrm{E}) = n$, soit $(\mathscr{H}, \mathrm{H})$ un hyperplan affine de E, soit $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ une équation de H dans la base $\mathscr{B}$ (un des a_i au moins est non nul), soit $\mathrm{A}(u_1, \dots, u_n) \in \mathscr{H}$. Un point M de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ appartient à $\mathscr{H}$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \in \mathrm{H}$, ce qui revient à dire que $a_1(x_1 - u_1) + \cdots + a_n(x_n - u_n) = 0$, on obtient une équation cartésienne de $\mathscr{H}$ de la forme $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$.

★**Exercice 29.2** *Montrer que la réciproque est vraie, c'est à dire que les points de coordonnées* $(x_1, \dots, x_n)$ *vérifiant une équation du type* $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$ *avec au moins un des coefficients* a_i *non nul, forment un hyperplan affine de direction l'hyperplan vectoriel d'équation cartésienne* $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$.

2) Hyperplans affines dans un euclidien

On se place dans un repère $\mathscr{R} = (\mathrm{O}, \mathfrak{B})$ orthonormal (ce qui signifie que $\mathfrak{B}$ est un b.o.n. de E).

Équation cartésienne et produit scalaire

Soit $\mathscr{H}$ un hyperplan affine de direction H, on sait que $\mathscr{H}$ admet une équation cartésienne de la forme $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = c$ où les α_i sont non tous nuls, soit $n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, et soit $\mathrm{A}(a_1, \cdots, a_n)$ un point de $\mathscr{H}$, alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}(x_1, \dots, x_n) \in \mathscr{H} &\iff \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = c \\
&\iff \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n \text{ (car } \mathrm{A} \in \mathscr{H}) \\
&\iff \alpha_1(x_1 - a_1) + \cdots + \alpha_n(x_n - a_n) = \\
&\iff \boxed{(n|\overrightarrow{\mathrm{AM}}) = 0}
\end{aligned}$$

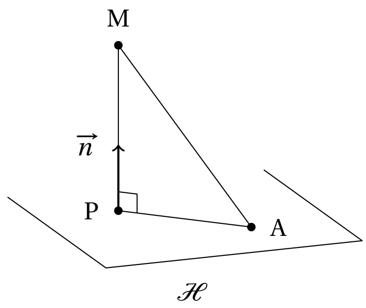
On dit que $\mathscr{H}$ est l'hyperplan affine passant par A et **normal au vecteur** n.

À retenir
Les coordonnées d'un vecteur normal à $\mathscr{H}$ se lisent directement sur une équation cartésienne de $\mathscr{H}$.
La direction de l'hyperplan affine est $H = \{x \in E \ / \ (n|x) = 0\} = \text{Vect}[n]^{\perp}$.

Distance d'un point à un hyperplan affine

Soit $\mathscr{H}$ un hyperplan affine, $M \in E$, P son projeté orthogonal sur $\mathscr{H}$ et soit $A \in \mathscr{H}$, alors $AM^2 = AP^2 + PM^2$, par conséquent la distance AM est minimale lorsque $A = P$ auquel on a $AM = PM$, cette distance est appelée **distance de** M **à** $\mathscr{H}$ et notée :

$$d(M, \mathscr{H}) = PM.$$



Calcul de $d(M, \mathscr{H})$

Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathscr{H}$ et A un point de $\mathscr{H}$ on a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM}$ or $\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$, d'où $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{PM} \cdot \vec{n} = \pm PM \|\vec{n}\|$ (vecteurs colinéaires) et donc :

$$d(M, \mathscr{H}) = PM = \boxed{\frac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}}$$

Si $\mathscr{H}$ est donné par une équation cartésienne $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = c$ dans un repère orthonormal, alors on peut prendre $n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et on a $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \alpha_1(x_1 - a_1) + \cdots + \alpha_n(x_n - a_n) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n - c$ car $A \in \mathscr{H}$, par conséquent on a :

$$\boxed{d(M, \mathscr{H}) = \frac{|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n - c|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2}}}$$

III ÉQUATIONS LINÉAIRES

1) Définition

Définition 29.3
Une équation linéaire est une équation du type : $u(x) = b$ avec $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $b \in F$ et $x \in E$ (inconnue).
L'équation $u(x) = 0_F$ est appelée équation homogène associée.

Exemples :

- Tout système linéaire est une équation linéaire, par exemple, le système $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \\ 3x + 5y = -1 \end{cases}$, peut se mettre sous la forme $u(X) = b$ avec $u \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $u(x, y) = (2x - y, x + 2y, 3x + 5y)$, avec $b = (1, 3, -1) \in \mathbb{R}^3$ et $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, il est facile de vérifier que $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.
- Une équation différentielle linéaire est une équation linéaire, par exemple l'équation différentielle $y' + y = 1$ peut se mettre sous la forme $u(y) = b$ avec $u : \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $u(y) = y' + y$ (u est linéaire), et $b \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ la fonction constante 1.

2) Structure des solutions

Théorème 29.1 (structure des solutions d'une équation linéaire)
Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et soit $b \in F$, l'équation linéaire $u(x) = b$ avec $x \in E$ a des solutions si et seulement si $b \in \text{Im}(u)$. Si c'est le cas, et si $x_0 \in E$ désigne une solution particulière (i.e. $u(x_0) = b$), alors l'ensemble de toutes les solutions est $S = \{y + x_0 \ / \ y \in \ker(u)\} = x_0 + \ker(u)$. ***C'est donc un sous-espace affine de direction*** $\ker(u)$.

Preuve : Il est clair qu'il y a des solutions si et seulement si $b \in \mathrm{Im}(u)$. Si on a $u(x_0) = b$, alors l'équation $u(x) = b$ équivaut à $u(x) = u(x_0)$, ou encore à $u(x - x_0) = 0_F$ (u est linéaire), ce qui équivaut encore à $\exists\, y \in \ker(u), x = y + x_0$. □

☞**Exemples** :

– Le système linéaire équivaut à (méthode de *Gauss*[2]) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} -y & + & 2x & = & 1 \\ & & 5x & = & 5\ (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ & & 13x & = & 4\ (L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} -y & + & 2x & = & 1 \\ & & x & = & 1 \\ & & 0 & = & -9\ (L_3 \leftarrow L_3 - 13L_2) \end{array}\right.$$

La dernière équation montre que ce système n'a pas de solution (*i.e.* $b \notin \mathrm{Im}(u)$).

– Pour l'équation différentielle, il y a une solution particulière : $y_0 : t \mapsto 1$. L'équation homogène associée est $y' + y = 0$ dont les solutions sont les fonctions $y = \lambda\phi$ où $\phi : t \mapsto e^{-t}$. L'ensemble des solutions est donc $S = \{1 + \lambda\phi \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

IV SOLUTION DES EXERCICES

Solution 29.1 *Soit $\mathcal{V}$ un s.e.a. de* E *de direction* V *et contenant un point* A *:*

– *Si* $\dim(V) = 0$, *alors* $V = \{0_E\}$ *et donc* $\mathcal{V} = \{A + u \mid u \in V\} = \{A\}$. *Un s.e.a. de dimension* 0 *est réduit à un point.*
– *Si* $\dim(V) = 1$, *alors* $V = \overrightarrow{u}$ *avec* $u \neq 0_E$, *et donc* $\mathcal{V} = \{A + \lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, *c'est la droite affine passant par* A *et de vecteur directeur* u.
– *Si* $\dim(V) = 2$, *alors* $V = \overrightarrow{u, v}$ *avec* (u, v) *libre, et donc* $\mathcal{V} = \{A + \alpha u + \beta v \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, *c'est le plan affine passant par* A *et de base* (u, v).
– *Si* $\dim(V) = 3$, *alors* $V = E$, *et donc* $\mathcal{V} = \{A + u \mid u \in E\} = E$.

Solution 29.2 *Soit* $\mathcal{V} = \{M(x_1, \ldots, x_n) \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b\}$, *supposons le coefficient* a_1 *non nul, alors le point* $A(y_1, \ldots, y_n)$ *avec* $(y_1, \ldots, yn) = (\frac{b}{a_1}, 0, \ldots, 0)$, *est dans* $\mathcal{V}$. *D'autre part :*

$$M(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{V} \iff a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = a_1y_1 + \cdots + a_ny_n \iff a_1(x_1 - y_1) + \cdots + a_n(x_n - y_n) = 0$$

Soit V *l'hyperplan vectoriel d'équation* $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$, *alors* $M \in \mathcal{V} \iff \overrightarrow{AM} \in V$, *donc* $\mathcal{V}$ *est l'hyperplan affine passant par* A *et de direction* V.

2. *Carl Friedrich* (1777 – 1855) : mathématicien allemand de génie, sans doute l'un des plus grands de tous les temps.